Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донской государственный технический университет»

Утверждено на заседании
кафедры
технической
механики 03.04.2021

Методические указания

Задания и пример выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Техническая механика» для подготовки бакалавров заочной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство»

(b080301АСЗПГCS_117пгс_2-20)

Ростов-на-Дону
2021

УДК 624.04

Методические указания для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Техническая механика» для подготовки бакалавров заочной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство». – Ростов н/Д: ДГТУ, 2021. – 25с.

Шифр определяется по предпоследней и последней цифре номера зачетной книжки. Например, номер зачетки 12345678. Тогда предпоследняя цифра 7 (данные из таблицы), последняя 8 (номер схемы).

Составители:

Д.т.н., проф. Л.Н.Панасюк

канд. техн. наук, доц.

Д.А.Высоковский,

ст. преп. В.С.Тюрина

Рецензент: проф, д-р физ.-мат.

наукА.А. Ляпин

Задача Д1

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость υ_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0 –Д1.9, табл. Д1).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости υ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют. сила трения (коэффициент трения груза о трубу f = 0,2) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. t. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задача Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая в этот момент t = 0. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина t участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dx}.$$

Номер	m, кг	υ_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н

условия							
0	2	20	6	$0{,}4\upsilon$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8\upsilon^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5\upsilon$	–	3.2	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6\upsilon^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4\upsilon$	–	2.2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5\upsilon^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3\upsilon$	–	2.6	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8\upsilon^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5\upsilon$	–	3.3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2\upsilon^2$	4	–	$-6\sin(4t)$

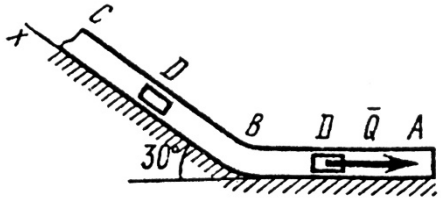

Рис. Д1.0

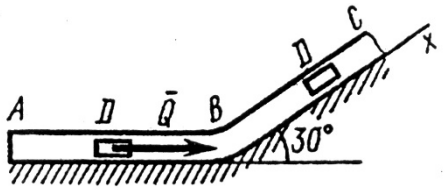

Рис. Д1.1

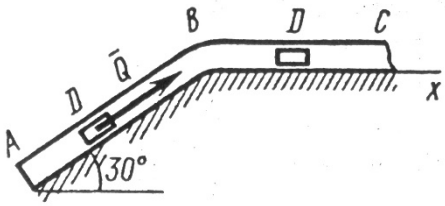

Рис. Д1.2

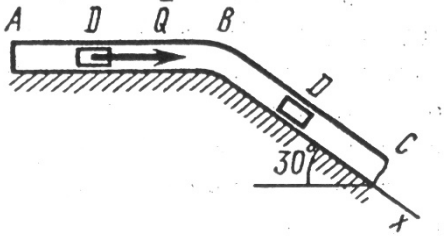

Рис. Д1.3

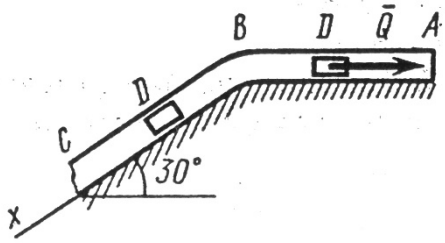

Рис. Д1.4

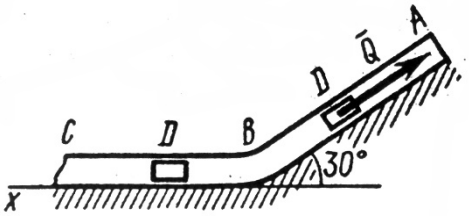

Рис. Д1.5

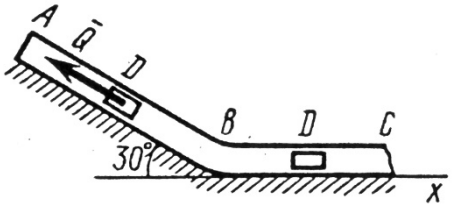

Рис. Д1.6

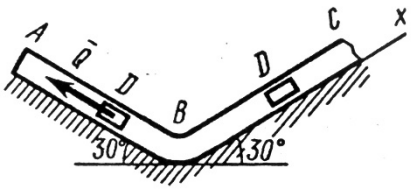

Рис. Д1.7

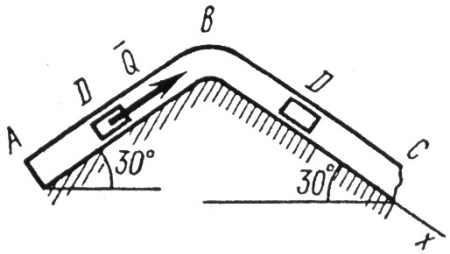

Рис. Д1.8

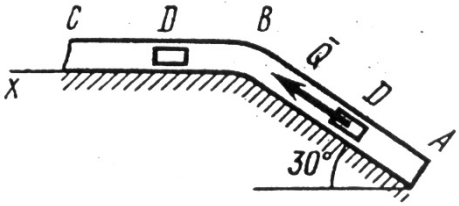

Рис. Д1.9

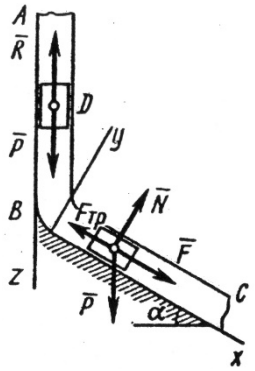

Рис. Д1

Пример Д1. На вертикальном участке *AB* трубы (рис. Д1) на груз *D* массой *m* действуют сила тяжести и сила сопротивления *R*; расстояние от точки *A,* где $\upsilon = \upsilon_o$, до точки *B* равно *l*. На наклонном участке *BC* на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Д а н о: m = 2 кг, $R = \mu\upsilon^2$, где μ = 0,4 кг/м, υ_o = 5 м/с, l = 2,5 м. F_x = =16sin(4t).

Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке *BC*.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке *AB,* считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $P = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = \sum F_{kz} \text{ или } m\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dz} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\upsilon^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят**.** Учтя еще, что $\upsilon_z = \upsilon$, получим

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = mg - \mu\upsilon^2 \text{ или } \upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - \upsilon^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1},\ n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \tag{3}$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2\upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dz} = -2k(\upsilon^2 - n). \tag{4}$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2\upsilon d\upsilon}{\upsilon^2 - n} = -2kdz \text{ и } \ln(\upsilon^2 - n) = -2kz + C_1. \tag{5}$$

По начальным условиям при $z = 0$ $\upsilon = \upsilon_0$, что дает $C_1 = \ln(\upsilon_0^2 - n)$ и из равенства (5) находим $\ln(\upsilon^2 - n) = -2kz + \ln(\upsilon_0^2 - n)$ или $\ln(\upsilon^2 - n) - \ln(\upsilon_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{\upsilon^2 - n}{\upsilon_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{\upsilon^2 - n}{\upsilon_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$\upsilon^2 = n + (\upsilon_0^2 - n)e^{-2kz}. \tag{6}$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость υ_B груза в точке B ($\upsilon_0 = 5$ м/с, число е = 2,7):

$$\upsilon_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \text{ и } \upsilon_B = 6{,}4 \text{ м/с}. \tag{7}$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке *BC;* найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\upsilon_0 = \upsilon_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $P = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{тр}$ и $\overline{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x$$

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр} + F_x \tag{8}$$

где $F_{тр} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так

как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t) \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30° - 0{,}2\cos 30°) = 3{,}2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$\upsilon_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0 = \upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_5 = \upsilon_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4\ .$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8.4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4\,t - 0{,}5\sin(4t), \qquad (14)$$

где x – в метрах, t. – в секундах.

Задача Д2

Груз *1* массой m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис. Д2.0 – Д2.9, табл. Д2). Лифт движется вертикально по закону $z = 0{,}5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^2\sin(\omega t) + \alpha_3\cos(\omega t)$ (ось z направлена по вертикали вверх; z выражено в метрах, t – в секундах). На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu\upsilon$, где υ – скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т. е. $x = f(t)$; начало координат поместить в точке, где находится прикрепленный к грузу конец пружины, когда пружина не деформирована. При этом во избежание ошибок в знаках направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором $x > 0$, т. е. пружина растянута. При подсчетах можно принять g = 10 м/с^2. Массой пружин и соединительной планки *2* пренебречь.

В таблице обозначено: c_1, c_2, c_3 – коэффициенты жесткости пружин, λ_o – удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени $t = 0$, υ_0 – начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах c_1, c_2, c_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой *2* концы обеих оставшихся пружин.

Таблица Д2

Номер условия	m, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	α_1, м/с^2	α_2, м	α_3, м	ω, 1/с	μ, Н· с/м	λ_o, м	υ_o, м/с
0	1	300	150	–	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	–	240	120	–0,5g	0	0	–	8	0,1	0
2	0,5	–	100	150	0	0,5	0	5	0	0	4
3	1	240	–	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	1020	–	–g	0	0	–	6	0,15	0
5	2	–	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	–	120	g	0	0	–	4	0	2
7	0,5	120	–	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	–	0	0	0,2	20	0	0,15	0
9	1	200	–	300	1,5g	0	0	–	20	0	3

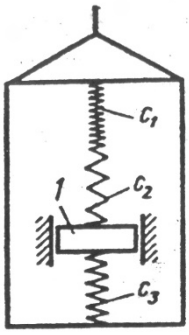

Рис. Д2.0

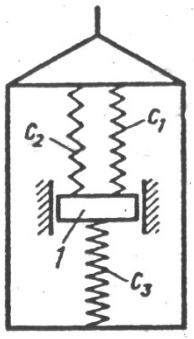

Рис. Д2.1

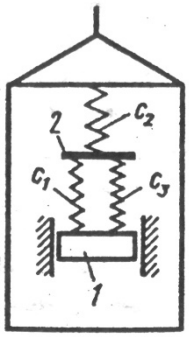

Рис. Д2.2

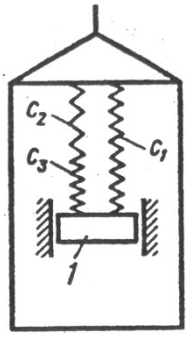

Рис. Д2.3

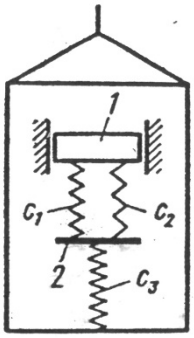

Рис. Д2.4

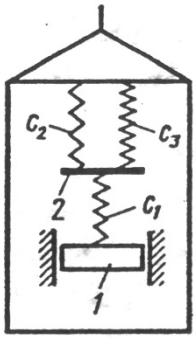

Рис. Д2.5

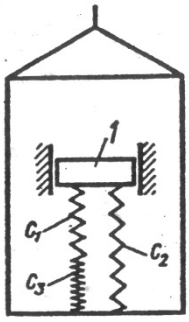

Рис. Д2.6

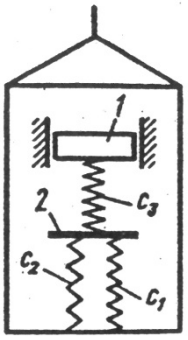

Рис. Д2.7

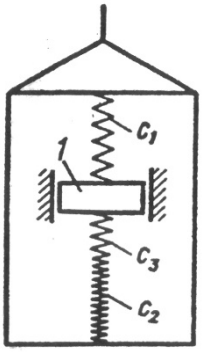

Рис. Д2.8

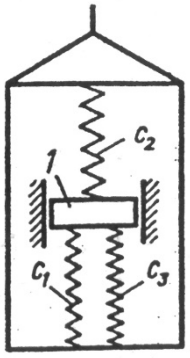

Рис. Д2.9

Условие $\mu = 0$ означает, что сила сопротивления R отсутствует.

Указания. Задача Д2 охватывает одновременно относительное движение и колебания материальной точки.

Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. Затем прикрепленные к грузу пружины (по условиям задачи их будет две) заменить эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости $c_{экв} = c$, произведя соответствующий расчет.

а) Если пружины соединены друг с другом последовательно

(как пружины с жесткостями c_1 и c_2 на рис. Д2.0), то при равновесии под действием некоторой силы $\overline{Q}$, приложенной к свободному концу пружины, усилия в любом поперечном сечении пружин одинаковы и равны Q. Удлинения пружин $\lambda_1 = Q/c_1$, $\lambda_2 = Q/c_2$, удлинение эквивалентной пружины $\lambda = Q/c$ и $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Отсюда

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

б) Если груз прикреплен к двум параллельным пружинам (как к пружинам с жесткостями c_1 и c_2 на рис. Д2.1) или находится между двумя пружинами, то при равновесии под действием некоторой силы $\overline{Q}$ каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение λ. Тогда для двух пружин $c_1\lambda + c_2\lambda = Q$, а для эквивалентной пружины $c\lambda = Q$, отсюда $c = c_1 + c_2$.

После того как уравнение будет составлено (это будет линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка), его следует проинтегрировать, учтя начальные условия.

Пример Д2. В приборе для измерения вертикальных колебаний (рис.Д2) груз массой m прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c. Другой конец пружины прикреплен к корпусу прибора, который движется по закону $z = A\sin(\omega t)$ (неподвижная ось z направлена по вертикали вниз). Начальное удлинение пружины равно λ_o, а начальная скорость груза по отношению к корпусу прибора υ_o (направлена вертикально вниз).

Д а н о: m = 0,4 кг, c = 40 Н/м, λ_o = 0,05 м, υ_o = 0,5 м/с. A = 0,03 м, ω= 20 1/с.

О п р е д е л и т ь: $x = f(t)$ – закон движения груза по отношению к корпусу прибора.

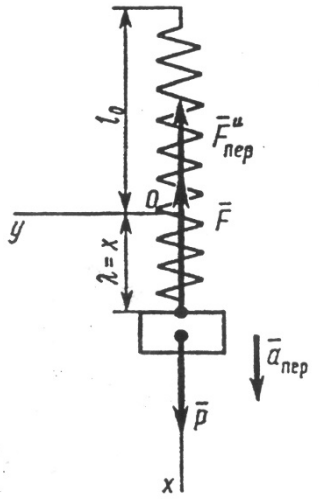

Рис. Д2

Решение. 1. Свяжем с корпусом прибора подвижную систему отсчета, начало *O* которой поместим в конце недеформированной пружины (ее длина обозначена l_0), а ось *x* направим в сторону удлинения пружины (см. рис. Д2). Рассмотрим груз в положении, при котором пружина растянута. На груз действует сила тяжести $\overline{P}$ и сила упругости $\overline{F}$. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $\overline{F}^и_{пер} = -m\overline{a}_{пер}$, кориолисова сила инерции равна нулю, так как переносное движение (движение корпуса прибора) является поступательным. Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид:

$$m\overline{a}_{отн} = \overline{P} + \overline{F} + \overline{F}^и_{пер}.$$

Проектируя обе его части на ось *x,* получим

$$m\ddot{x} = P_x + F_x + F^и_{перx} \qquad (1)$$

Здесь $P_x = P$, $F_x = -c\lambda = -cx$, где $\lambda = x$ – удлинение пружины, $F^и_{перx} = =-ma_{перx}$. Учитывая, что оси *x* и *z* направлены одинаково, получим $a_{перx} = =a_{перz} = \ddot{z} = -A\omega^2\sin(\omega t)$ и $F^и_{перx} = mA\omega^2\sin(\omega t)$.

Подставляя все найденные выражения проекций сил в уравнение (1), получим

$$m\ddot{x} = P - cx + mA\omega^2\sin(\omega t). \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + k^2x = b_1 + b_2\sin(\omega t) \qquad (3)$$

где обозначено

$$k^2 = c/m = 100 \text{ с}^{-2},\ b_1 = g = 10 \text{ м/с}^2;\ b_2 = A\omega^2 = 12 \text{ м/с}^2 . \qquad (4)$$

2. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать уравнение (3). Его общее решение, как известно из теории дифференциальных уравнений:

$$x = x_1 + x_2, \qquad (5)$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$, т. е.

$$x_1 = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt), \qquad (6)$$

а x_2 – частное решение уравнения (3). Учитывая, каковы правая и левая части этого уравнения, ищем x_2 в виде

$$x_2 = B + D\sin(\omega t). \qquad (7)$$

Для определения постоянных B и D находим $\ddot{x}_2 = -D\omega^2\sin(\omega t)$, подставляем значения $\ddot{x}_2$ и x_2 в уравнение (3) и приравниваем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при $\sin(\omega t)$ В результате, принимая во внимание обозначения (4), получим

$$B = \frac{b_1}{k^2} = 0{,}1 \text{ м},\ D = \frac{b_2}{k^2 - \omega^2} = -0{,}04 \text{ м}.$$

Тогда из равенств (5)–(7), учитывая, что $k = 10$ с$^{-1}$, а $\omega = 20$ с$^{-1}$, получим следующее общее решение уравнения (3):

$$x = C_1\sin(10t) + C_2\cos(10t) - 0{,}04\sin(20t) + 0{,}1. \qquad (8)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем еще $\upsilon_x = \dot{x}$;

$$\upsilon_x = 10C_1\cos(10t) - 10C_2\sin(10t) - 0{,}8\cos(20t). \qquad (9)$$

По условиям задачи при $t = 0$ $\upsilon_x = \upsilon_o = 0{,}5$ м/с, $x_o = \lambda_o = 0{,}05$ м. Подставив эти начальные данные в уравнения (8) и (9), найдем из них, что $C_1 = 0{,}13$, $C_2 = -0{,}05$. В результате уравнение (8) примет окончательно вид

$$x = 0{,}13\sin(10t) - 0{,}05\cos(10t) + 0{,}04\sin(20t) + 0{,}1$$

Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза, т. е. закон совершаемых им колебаний.

Задача Д3

Механическая система состоит из грузов D_1 массой $m_1 = 2$ кг и D_2 массой $m_2 = 6$ кг

и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3 = =12кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д3.0– Д3.9, табл. Д3). В момент времени t_o = 0, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r = 0,4 м и R = 0,8 м.

При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1C_1D_1$ изменяется по закону $\varphi_1=f_1(t)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ – по закону $\varphi_2 = f_2(t)$. В табл. Д3 эти зависимости даны отдельно для рис. 0–4 и 5–9, где φ выражено в радианах, t – в секундах.

Считая грузы материальными точками и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить закон изменения со временем величины, указанной в таблице в столбце «Найти», т. е. $x_3 = f_3(t)$ и $N = f(t)$. где x_3 – координата центра C_3 плиты (зависимость $x_3 = f_3(t)$ определяет закон движения плиты), N – полная нормальная реакция направляющих.

Таблица Д3

Номер условия	Рис. 0–4		Рис. 5–9		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
0	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2+2)$	x_3
1	$\pi(2-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+3)$	$\frac{\pi}{4}(2t-1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
2	$\frac{\pi}{4}(t^2+2)$	$\frac{\pi}{6}(5-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	πt^2	x_3
3	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t-2)$	$\frac{\pi}{6}(3t-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t)$	N
4	$\frac{\pi}{4}(1-3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2-4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2-t^2)$	x_3
5	$\frac{\pi}{6}(t+2)$	$\frac{\pi}{4}(1-t)$	$\pi(3-t)$	$\frac{\pi}{6}(t-1)$	N
6	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1-2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2-3)$	$\frac{\pi}{3}(2-t^2)$	x_3
7	$\frac{\pi}{3}(5-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4-t)$	N
8	$\frac{\pi}{6}(t^2+3)$	$2(2-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	$\pi(t^2+2)$	x_3

9	$\frac{\pi}{2}(4-t)$	$\pi(t+5)$	$\frac{\pi}{6}(2t-1)$	$\frac{\pi}{2}(2-t)$	N

Указания. Задача Д3 – на применение теоремы о движении центра масс. При этом для определения $x_3 = f_3(t)$ составить уравнение в проекции на горизонтальную ось x, а для определения N – на вертикальную ось y.

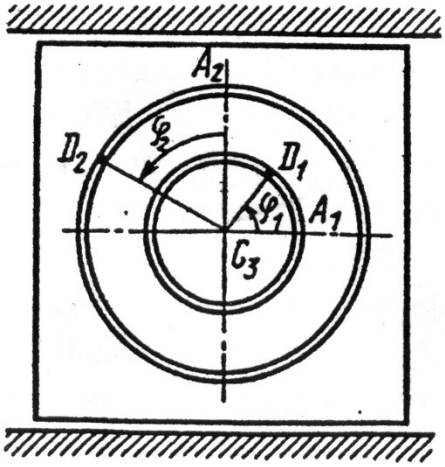

Рис. Д3.0

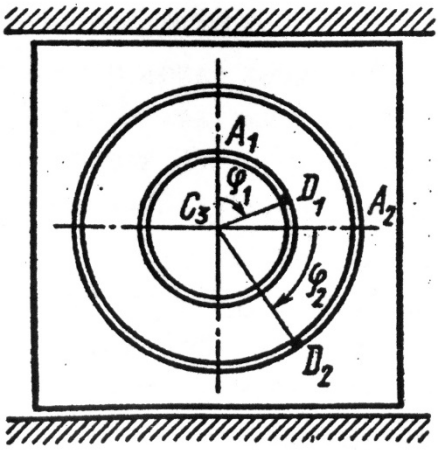

Рис. Д3.1

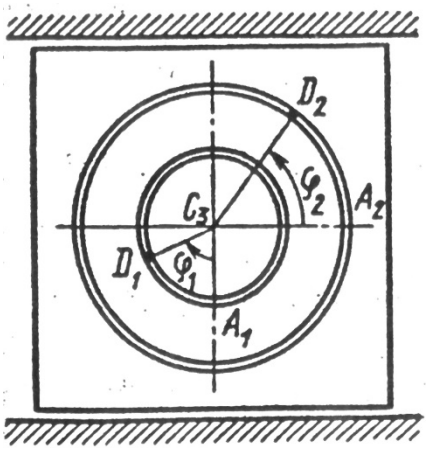

Рис. Д3.2

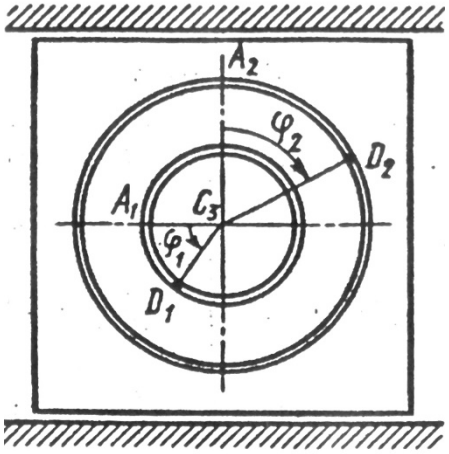

Рис. Д3.3

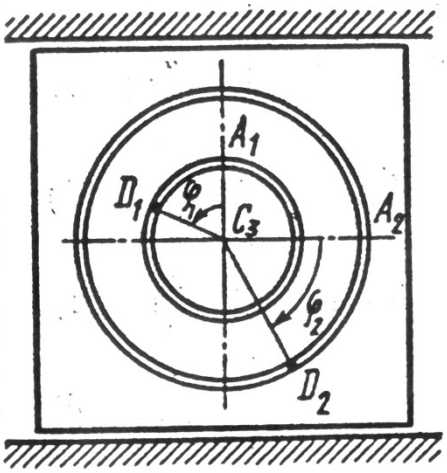

Рис. Д3.4

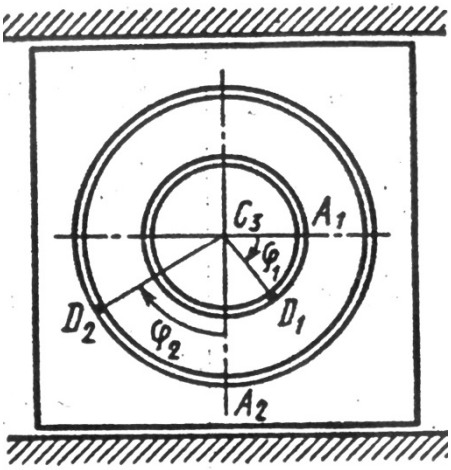

Рис. Д3.5

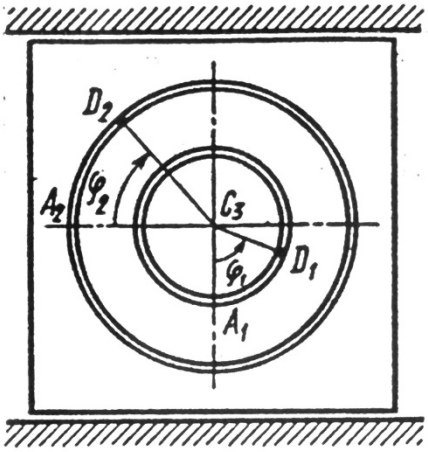

Рис. Д3.6

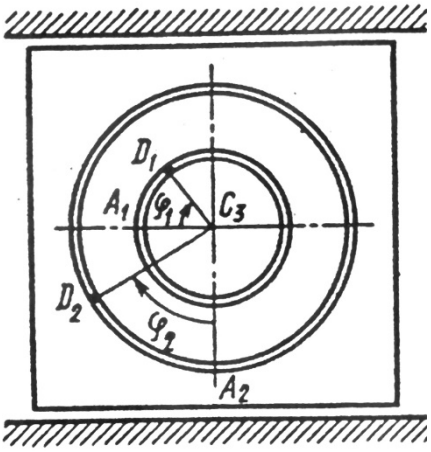

Рис. Д3.7

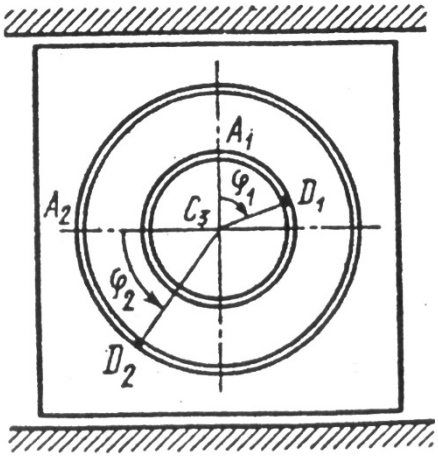

Рис. Д3.8

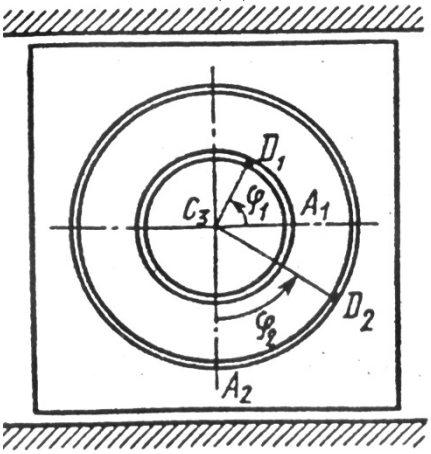

Рис. Д3.9

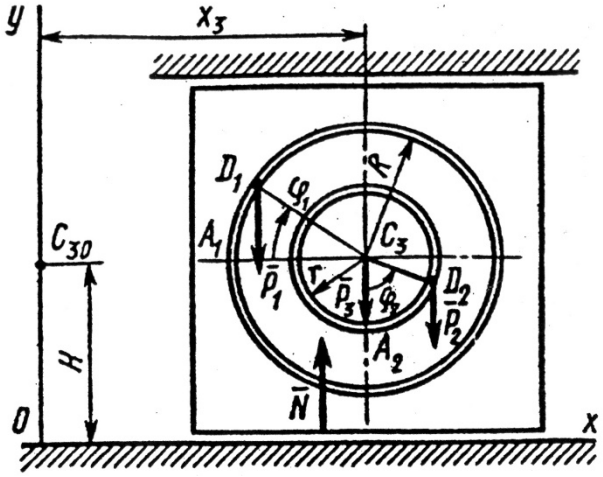

Рис. Д3

Пример Д3. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д3). В момент времени $t_o = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R, по законам $\varphi_1 = f_1(t)$и

$\varphi_2 = f_2(t)$.

Д а н о: m_1 = 6 кг, m_2 = 8 кг, m_3 = 12 кг, r = 0,6 м, R = 1,2 м, $\varphi_1 = \pi t$ рад, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}(1-t)$ рад (t – в секундах). О п р е д е л и т ь: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты, $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2, в произвольном положении (рис. ДЗ). Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакцию направляющих $\overline{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени $t_o = 0$.

а) Определение перемещения x_3. Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x. Получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \text{ или } M\ddot{x}_C = 0, \tag{1}$$

так как $\sum F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (1), найдем, что $M\dot{x}_C = C_1$, т.е. проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $\upsilon_{cx} = 0$, то $C_1 = 0$.

Интегрируя уравнение $M\dot{x}_C = 0$, получим

$$Mx_c = \text{const}, \tag{2}$$

т. е. центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Определим значение Mx_c. Из рис. ДЗ видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 - R\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 + r\sin\varphi_2$ Так как по формуле, определяющей координату x_c центра масс системы, $Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$, то

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1R\cos(\pi t) + m_2r\sin(\pi/2 - \pi t/2). \tag{3}$$

В соответствии с равенством (2) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положениях будут равны. Следовательно, учитывая,

что при $t_o = 0$ $x_3 = 0$, получим

$$-m_1R + m_2r = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1R\cos(\pi t) + m_2r\cos(\pi t/2). \qquad (4)$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3.

Ответ: $x_3 = 0{,}09[3\cos(\pi t) - 2\cos(\pi t/2) - 1]$м, где t – в секундах.

б) **Определение реакции** *N.* Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось y (см. рис. Д3):

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \text{ или } M\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3. \qquad (1)$$

Отсюда получим, учтя, что $P_1 = m_1g$, и т. д.:

$$N = M\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g \qquad (2)$$

По формуле, определяющей ординату y_c центра масс системы,

$$My_c = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3, \text{ где } y_1 = H + R\sin\varphi_1,$$

$y_2 = H - r\cos\varphi_2$, $y_2 = H = OC_{30} = \text{const}$, получим

$$My_c = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1R\sin(\pi t) - m_2r\cos(\pi/2 - \pi t/2)$$

или

$$My_c = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1R\sin(\pi t) - m_2r\sin(\pi t/2).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем

$$M\dot{y}_C = m_1R\pi\cos(\pi t) - m_2r(\pi/2)\cos(\pi t/2);$$

$$M\ddot{y}_C = -m_1R\pi^2\sin(\pi t) + m_2r(\pi^2/4)\sin(\pi t/2).$$

Подставив это значение $M\ddot{y}_C$ в уравнение (2), определим искомую зависимость N от t.

Ответ: $N = 254{,}8 - 1{,}2\pi^2[6\sin(\pi t) - \sin(\pi t/2)]$, где t – в секундах, N – в ньютонах.

Задача Д4

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *1* массой m_1 = 18 кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза *D* массой m_2 = 6 кг (рис. Д4.0 – Д4.9, табл. Д4). В момент времени $t_o = 0$, когда скорость плиты u_o = 2 м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты.

На рис. 0–3 желоб *KE* прямолинейный и при движении груза расстояние $s = AD$ изменяется по закону $s = f_1(t)$, а на рис. 4–9 желоб – окружность радиуса $R = 0{,}8$ м и при движении груза угол $\varphi = \angle AC_1D$ изменяется по закону $\varphi = f_2(t)$, В табл. Д4 эти зависимости даны отдельно для рис. 0 и 1; для рис. 2 и 3 и т. д., где s выражено в метрах, φ – в радианах, t – в секундах.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить зависимость $u = f(t)$, т. е. скорость плиты как функцию времени.

Таблица Д4

Номер условия	$s = f_1(t)$		$\varphi = f_2(t)$	
	Рис. 0,1	Рис. 2,3	Рис. 4,5,6	Рис. 7,8,9
0	$0{,}8\sin(\pi t^2)$	$0{,}4(3t^2 - 2)$	$\pi(3 - 2t^2)/3$	$\pi(2t^2 - 1)$
1	$1{,}2\cos(\pi t/2)$	$0{,}6\sin(\pi t^2/2)$	$\pi(1 - 3t^2)/4$	$\pi(1-4t^2)/3$
2	$0{,}6(2t^2 - 1)$	$0{,}8\cos(\pi t)$	$\pi(t^2 - 6)/6$	$\pi(3 + 4t^2)/6$
3	$0{,}4\sin(\pi t^2/3)$	$0{,}5\sin(\pi t^2/6)$	$\pi(2 - t^2)$	$\pi(t^2 + 1)/2$
4	$0{,}5\cos(\pi t/6)$	$1{,}2\cos(\pi t/3)$	$\pi(1+ 2t^2)/6$	$\pi(1 - 5t^2)/4$
5	$0{,}6\sin(\pi t^2/4)$	$0{,}5(3 - 4t^2)$	$\pi(5t^2 +1)/4$	$\pi(t^2 - 4)/3$
6	$0{,}8(2 - 3t^2)$	$0{,}8\sin(\pi t^2/3)$	$\pi(t^2 - 2)/2$	$\pi t^2/4$
7	$0{,}6\cos(\pi t/3)$	$0{,}4\cos(\pi t/4)$	$\pi(3 + t^2)/2$	$\pi(3t^2 - 1)/6$
8	$1{,}2\sin(\pi t^2/5)$	$1{,}2\sin(\pi t^2)$	$\pi t^2/2$	$\pi(t^2 + 3)/2$
9	$0{,}8\cos(\pi t/4)$	$0{,}6\cos(\pi t/6)$	$\pi(t^2 + 2)/6$	$\pi(2 - t^2)/4$

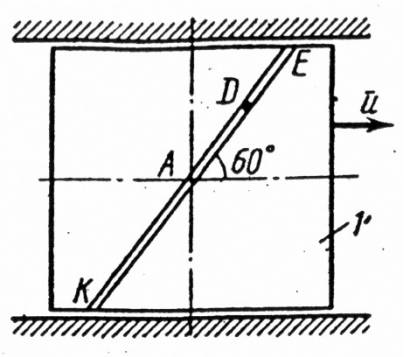

Рис. Д4.0

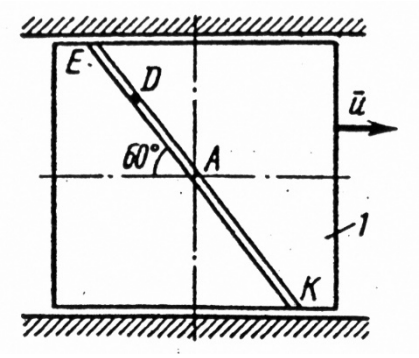

Рис. Д4.1

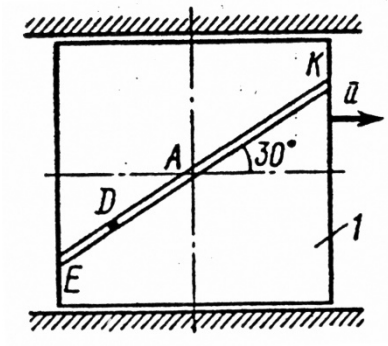

Рис. Д4.2

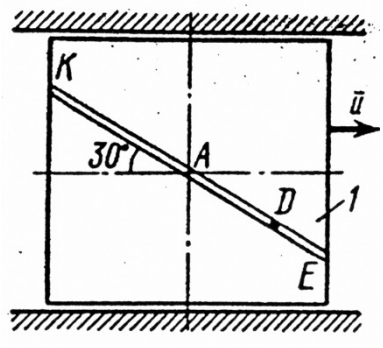

Рис. Д4.3

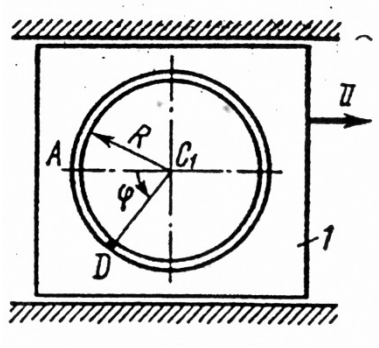

Рис. Д4.4

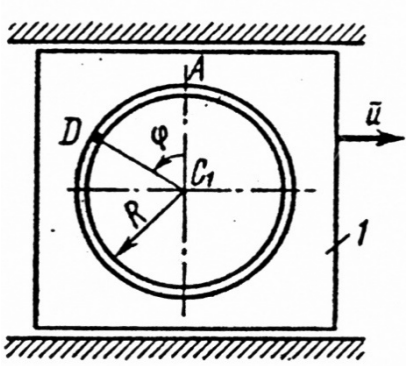

Рис. Д4.5

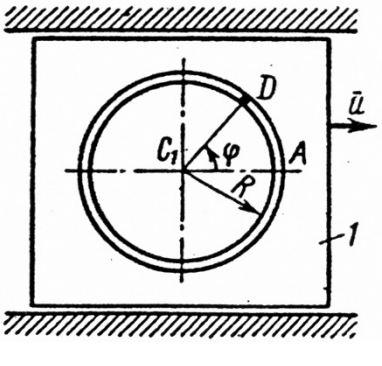

Рис. Д4.6

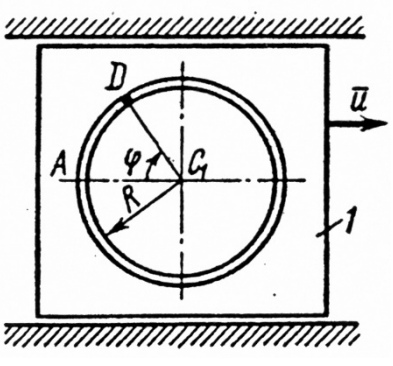

Рис. Д4.7

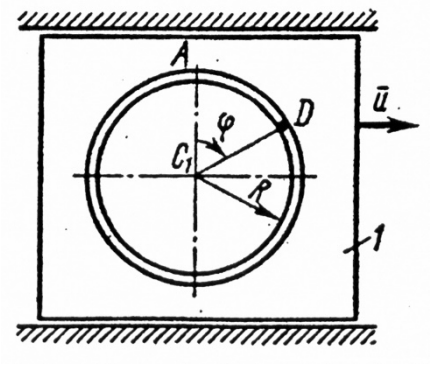

Рис. Д4.8

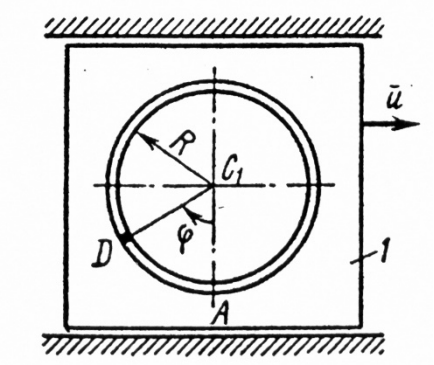

Рис. Д4.9

Указания. Задача Д4 на применение теоремы об изменении количества движения системы. При решении составить уравнение, выражающее теорему, в проекции на горизонтальную ось.

Пример Д4. В центре тяжести A тележки массой m_1 движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплен невесомый стержень AD длиной l с грузом D массой m_2 на конце (рис. Д4). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость тележки $u = u_0$, стержень AD начинает вращаться вокруг оси A по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Д а н о: m_1 = 24 кг, m_2 = 12 кг, u_0 = 0,5 м/с, l = 0,6 м, $\varphi = (\pi/3)(1+2t^3)$ рад (t – в секундах). О п р е д е л и т ь: $u = f(t)$ – закон изменения скорости тележки.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки и груза D, в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и реакции плоскости $\overline{N}'$, $\overline{N}''$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось x была горизонтальна.

Чтобы определить u, воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\overline{Q}$ в проекции на ось x. Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рис. Д4), то $\sum F_{kx}^{e} = 0$ и теорема дает

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{e} = 0, \text{ откуда } Q_x = C_1. \qquad (1)$$

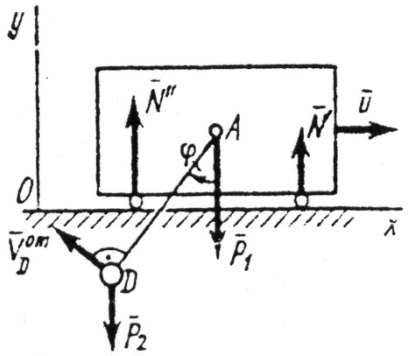

Рис. Д4

Для рассматриваемой механической системы $\overline{Q} = \overline{Q}^{\tau} + \overline{Q}^{D}$, где $\overline{Q}^{\tau} = m_1\overline{u}$ и $\overline{Q}^{D} = m_2\overline{\upsilon}_D$ – количества движения тележки и груза D соответственно ($\overline{u}$ – скорость тележки, $\overline{\upsilon}_D$– скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда из равенства (1) следует, что

$$Q_x^{\tau} + Q_x^{D} = C_1 \text{ или } m_1u_x + m_2\upsilon_{Dx} = C_1 . \qquad (2)$$

Для определения υ_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при вращении стержня AD вокруг оси A), а движение самой тележки – переносным. Тогда $\overline{\upsilon}_D = \overline{\upsilon}_D^{пер} + \overline{\upsilon}_D^{отн}$ и

$$\upsilon_D = \upsilon_D^{пер} + \upsilon_D^{отн}. \qquad (3)$$

Но $\overline{\upsilon}_D^{пер} = u$ и, следовательно, $\overline{\upsilon}_{Dx}^{пер} = u_x$. Вектор $\overline{\upsilon}_D^{отн}$ направлен перпендикулярно стержню и численно $\overline{\upsilon}_D^{отн} = l \cdot \omega_{AD} = l\dot{\varphi} = 2l\pi t^2$.

Изобразив этот вектор на рис. Д4 с учетом знака $\dot{\varphi}$, найдем, что $\upsilon_{Dx}^{отн} = -\upsilon_D^{отн}\cos\varphi$. Окончательно из равенства (3) получим

$$\upsilon_{Dx} = u_x - \upsilon_D^{от}\cos\varphi = u_x - 2l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right). \qquad (4)$$

(В данной задаче величину υ_{Dx} можно еще найти другим путем, определив абсциссу x_D груза D, для которой, как видно из рис. Д4, получим $x_D = x_A - l\sin\varphi$; тогда $\upsilon_{Dx} = \dot{x}_D = \dot{x}_A - l\dot{\varphi}\cos\varphi$, где $\dot{x}_A = u_x$, а $\dot{\varphi} = 2\pi t^2$.)

При найденном значении υ_{Dx} равенство (2), если учесть, что $u_x = u$, примет вид

$$m_1u + m_2u - m_2 2l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = C_1. \qquad (5)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при $t = 0$ $u = u_o$. Подстановка этих величин в уравнение (5) дает $C_1 = -(m_1 + m_2)u_o$ и тогда из (5) получим

$$(m_1 + m_2)u - 2m_2l\pi t^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0.$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости u тележки от времени:

$$u = u_0 + -\frac{2l\pi m_2}{m_1 + m_2}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) \qquad (6)$$

Подставив сюда значения соответствующих величин, находим искомую зависимость u от t.

Ответ: $u = 0{,}5 + 0{,}4\pi t^2 \cdot \cos(\pi/3 + 2\pi t^3/3)$ м/с.